# Immunizzazione Finanziaria e Reti di Imprese

## *Financial Immunization and Network Firms*

Luigi Romano and Donato Scolozzi

**Abstract** *The Financial Immunization Theory examines the interest rate risk problem and studies the conditions in which it is possible to manage liability cash flow through asset cash flow. This paper covers the semi-deterministic financial immunization when the network firms' cash flows are given by a sequence of real numbers. The authors consider the problem of the constitution of network firms' patrimonial found managed with semi-deterministic financial immunization techniques, if the variables are known with certainty, or with stochastic financial immunization techniques, if few variables are known with probability. The authors examine the contribution forms which guarantee network firms's minimun funding, and also they are immunized with respect to interest rate risk . The paper considers two different structures of interest rate, the first for the asset cash flow and the second for the liability cash flow. Old Redington's ( [23]) and Fisher-Weil's ( [13]) results are generalized in this setting. In a further work, the authors aim to consider the stochastic approach to present study.*

**Abstract** *La teoria dell'Immunizzazione Finanziaria esamina il problema del rischio di tasso di interesse e studia le condizioni in cui é possibile gestire il flusso di cassa passivo con il flusso di cassa attivo. In questo lavoro si studia l'immunizzazione finanziaria nel caso in cui i flussi di cassa, per una rete di imprese, sono rappresentati da successioni di numeri reali. Si considera il problema della costituzione del fondo patrimoniale della rete di imprese gestito con tecniche di immunizzazione finanziaria semi-deterministica, nel caso in cui le variabili sono note con certezza, oppure con tecniche di immunizzazione finanziaria stocastica, se alcune variabili sono note con probabilitá. Gli autori esaminano la possibilitá di avere forme di contribuzione da parte degli operatori che, oltre a garantire il minimo esborso per la rete, siano immunizzate rispetto al rischio di tasso di interesse. Si considerano due strutture di tassi di interesse, una per le poste attive ed una per le poste passive e, in queste condizioni, vengono estesi e applicati i risultati di Redington [23] e di Fisher-Weil [13]. In un lavoro successivo gli autori si propongono di estendere lo studio all'aspetto stocastico del problema qui esaminato.*

**Key words:** immunization, cash flows, duration, network firms.

---

Luigi Romano
Department of Management, Economics, Mathematics and Statistics, University of Salento (Italy) e-mail: luigi.romano@unisalento.it

Donato Scolozzi
Department of Management, Economics, Mathematics and Statistics, University of Salento (Italy) e-mail: donato.scolozzi@unisalento.it

# 1 Introduzione

In passato i distretti industriali, concepiti come delle reti informali tra imprese geograficamente concentrate, in alcuni casi hanno contribuito ad attenuare i limiti connessi con la piccola dimensione. In tempi piú recenti, l'attenuarsi dei vantaggi derivanti dalla vicinanza geografica, ha favorito la collaborazione tra imprese geograficamente non concentrate. Nel 2000 la "Carta di Bologna" considerava le reti come un elemento importante per favorire la competitivitá delle piccole imprese [21].

Il Decreto Legge 10 febbraio 2009, n. 5 ha introdotto nel nostro ordinamento il contratto di rete, mediante il quale *"piú imprenditori perseguono lo scopo di accrescere, individualmente e collettivamente, la propria capacitá innovativa e la propria competitivitá sul mercato e a tal fine si obbligano, sulla base di un programma comune di rete, a collaborare in forme e in ambiti predeterminati attinenti all'esercizio delle proprie imprese, ovvero a scambiarsi informazioni o prestazioni di natura industriale, commerciale, tecnica o tecnologica, ovvero ancora ad esercitare in comune una o piú attivitá rientranti nell'oggetto della propria impresa. Il contratto puó anche prevedere l'istituzione di un fondo patrimoniale comune e la nomina di un organo comune incaricato di gestire, in nome e per conto dei partecipanti, l'esecuzione del contratto o di singole parti o fasi dello stesso"*.

Si consente quindi una collaborazione tra imprese che, pur conservando la propria indipendenza, autonomia e specialitá, permette di realizzare progetti e obiettivi condivisi, utili ad accrescere la capacitá innovativa e la competitivitá. In alcuni casi, puó considerarsi come uno strumento propedeutico, o alternativo, alla crescita dimensionale.

Alcuni degli aspetti definiti dal contratto sono:

- il programma comune;
- le regole di gestione dell'eventuale fondo patrimoniale comune, misura e criteri di valutazione dei conferimenti iniziali, e degli eventuali contributi successivi che ciascun retista é obbligato a versare;
- l'eventuale istituzione di un organo comune per l'esecuzione del programma;
- la durata del contratto, le eventuali modalitá di adesione successiva o di recesso anticipato dei retisti.

Sotto il profilo giuridico sono presenti elementi obbligatori e facoltativi. Tra questi ultimi compare l'istituzione di un fondo patrimoniale comune, finalizzato alla realizzazione del programma di rete [6]. Il contratto puó prevedere, oltre ai conferimenti iniziali, il versamento di contributi successivi e straordinari, ma funzionali alla realizzazione del programma. Il fondo é costituito dai contributi delle imprese partecipanti e dai beni acquistati con questi contributi. Si applicano, in quanto compatibili, le disposizioni previste per i consorzi con attivitá esterna, di cui agli articoli 2614 e 2615 del codice civile. Per le obbligazioni contratte dall'organo comune, in relazione al programma di rete, si risponde soltanto con il fondo comune. Le parti possono prevedere, o escludere, la possibilitá di ingresso di nuovi retisti successivamente alla data di stipula, o anche la possibilitá di recesso anticipato. Il contratto pertanto puó anche disciplinare l'eventuale ripetizione dei contributi giá versati.

La Legge n. 134/2012 prevede che le parti contraenti possano dar vita ad un autonomo ente giuridico. Si noti che mentre per la "rete contratto" l'istituzione di un fondo patrimoniale é facoltativo, per la costituzione di una "rete soggetto", é obbligatorio. Nel secondo caso, occorre inoltre istituire l' *organo comune* che avrá la rappresentanza della rete [18]. Nel caso in cui la rete sia dotata di fondo patrimoniale e di organo comune, é prevista la facoltá di attribuire soggettivitá giuridica [22] alla rete definita quindi "rete soggetto", per distinguerla dalla rete meramente contrattuale definita "rete contratto". Affinché la rete sia dotata di soggettivitá giuridica occorre l'iscrizione nella sezione ordinaria del Registro delle Imprese.

Per stabilire l'entitá del fondo, le tre principali soluzioni consigliate [16] prevedono un importo pari al:

1) costo stimato di funzionamento della rete per un anno;
2) costo stimato complessivo del programma di rete, per tutta la durata prevista del contratto;

3) costo stimato complessivo del programma di rete, per tutta la durata prevista del contratto, al netto di tutti (o parte) i ricavi attesi dall'attivitá di rete.

La teoria economica cerca di individuare le motivazioni che portano alla nascita delle reti di imprese e di studiarne gli effetti, sia sui retisti che sul mercato di riferimento. Secondo la teoria contrattuale dell'impresa, i principali fattori che stimolano la creazione delle reti sarebbero i costi di transazione e l'intrinseca incomple-
tezza dei contratti [4]. Se i costi di transazione aumentano, l'impresa é maggiormente stimolata verso la ricerca di forme di collaborazione, e quindi verso la costituzione di reti di imprese.

Partendo dallo studio dell'impatto della cooperazione sui profitti degli altri retisti e/o dei concorrenti, l'approccio dei networks studia la scelta di formare legami con altre imprese e gli effetti ottenuti. L'impresa opterá per la cooperazione ritenuta piú profittevole.

La possibilitá di sviluppare congiuntamente un'attivitá innovativa, ha grande importanza per le piccole imprese, a causa dei costi elevati e dell'incertezza dei profitti collegati con l'innovazione. Le reti di ricerca e sviluppo possono infatti contribuire nel superamento di eventuali soglie minime all'investimento, ed eliminare duplicazioni di spesa.

I modelli di peer selection [14] analizzano i rapporti di credito. I prenditori di fondi, a differenza dei prestatori, conoscono le caratteristiche degli altri affidati. L'accesso limitato al gruppo, e la presenza di informazione locale sulle altre imprese, agevolano l'omogeneitá tra i retisti. La responsabilitá solidale in caso di default di un'impresa partecipante, riduce l'asimmetria informativa del finanziatore, ed agevola il gruppo stesso nell'ottenere un finanziamento che i componenti, singolarmente, non otterrebbero.

Secondo lo schema di Grossman-Hart-Moore [4], si puó considerare la rete come il risultato di un progetto di crescita delle imprese aderenti, nel caso in cui ci siano fattori che ostacolano la crescita interna, o le fusioni e acquisizioni, oppure nel caso di incentivi normativi per le imprese di piccole dimensioni. La rete sarebbe quindi un'alternativa alla crescita dimensionale, capace di coniugare alcuni benefici della piccola dimensione con alcuni vantaggi propri della grande dimensione, conservando inoltre autonomia giuridica ed operativa.

Ai fini del presente lavoro si suppone che la rete di imprese assume un'obbligazione (liability), per l'attuazione del programma comune, costituita da un flusso di poste monetarie passive, che potrebbe anche essere illimitato nel tempo. Si affronta quindi la questione dell'entitá dei conferimenti richiesti a ciascun retista, esaminando il problema del rischio di tasso di interesse e minimizzando il costo complessivo della rete. Dopo aver descritto il problema (par. 2), si analizza dapprima il caso di un solo impegno (par. 3) e successivamente il caso di piú poste monetarie di debito (par. 4). In un lavoro successivo gli autori si propongono di analizzare l'aspetto stocastico del problema qui affrontato, unitamente ad altri temi come il recesso anticipato, il nuovo ingresso e il default del retista.

## 2 Il problema

Si consideri una rete di imprese, "rete contratto" o "rete soggetto", costituita da $n$ retisti, con $n \in \mathbb{N}$, e si supponga che essa, in una certa data $t$, voglia costituire un fondo distribuito su uno scadenzario $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, e tale che si abbia $t < t_1 \leq t_k < t_{k+1},\ \forall\ \ k \in \mathbb{N}$ in modo che sia onorato il pagamento di un flusso di poste monetarie passive $\mathbf{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $y_k \geq 0$, ciascuna di esse esigibile alla data $t_k$ e ovviamente non tutte nulle. Per questo motivo il retista $j-esimo$, con $j = 1,2,...,n$, si impegna alla data $t$ a contribuire attraverso versamenti distribuiti lungo lo stesso scadenzario $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e individuati dalle poste monetarie $\mathbf{q}_j = (a_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$, con $a_{jk} \geq 0$.

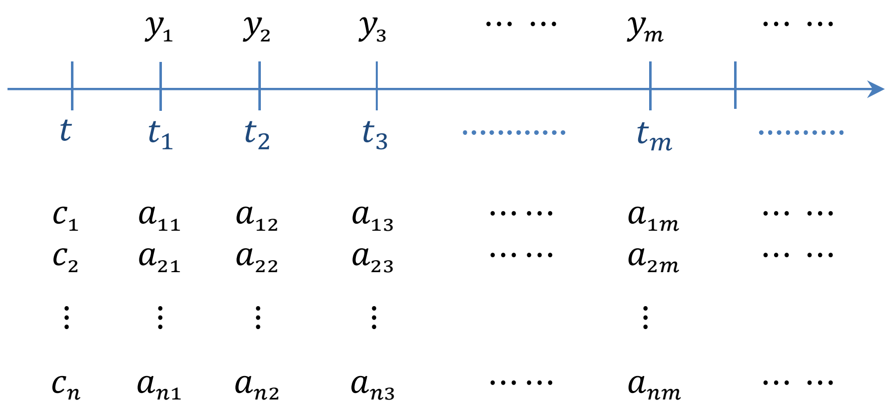
Non é escluso che, per qualche $j$, con $j$ fissato, le poste monetarie relative al flusso $\mathbf{q}_j = (a_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$, possano essere definitivamente nulle. Si suppone che ci sia coincidenza tra lo scadenzario degli impegni

della rete e quello del versamento della quota da parte di ciascun retista. Si vede facilmente che questa ipotesi non é restrittiva. Il modello esaminato é inquadrabile nella teoria semi deterministica della finanza matematica: tutte le grandezze temporali e monetarie considerate, tranne una, sono assegnate con certezza.

Per ciascun retista $j$ resta individuata in $t$ una posta monetaria $c_j$, con $0 < c_j \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} < +\infty$, che rappresenta l'impegno equivalente in $t$, determinato attraverso la regola del tasso interno di rendimento (tir), che il retista si considera assegnato lungo lo scadenzario. Se $i_j^*$ é il tir relativo, la posta monetaria $c_j$, é individuata dalla nota formula:

$$c_j = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk}(1+i_j^*)^{t-t_k}.$$

Restano quindi individuati: una data iniziale $t$, uno scadenzario $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ per cui si ha $t < t_1 \leq t_k < t_{k+1}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, un vettore di poste monetarie passivo $\mathbf{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed una matrice $A = (a_{jk})$ di poste monetarie formata da $n$ righe secondo il seguente schema:




Alla data $t$ sono assegnate due funzioni valore $v(t,s)$ e $w(t,s)$, rispettivamente una per l'attivo (entrate) e l'altra per il passivo (uscite). Le due funzioni individuano i tassi di mercato e si suppone verifichino le consuete ipotesi della finanza che permettono il rispetto degli assiomi *"non esistono opportunitá di arbitraggio"* e *"denaro matura denaro"* (vedi [12], [24]). Mediante la funzione $w(t,s)$ si determina il valore del debito in $t$ della rete:

$$W(t,\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k).$$

Si considera poi un vettore $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n)$ di numeri reali non negativi $\alpha_j \geq 0$ (quote), e si seleziona il vettore $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di poste monetarie definite mediante le relazioni:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{jk}.$$

Tale vettore determina in $t$ la posta monetaria definita da:

$$W(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{jk} \right) v(t,t_k)$$

che rappresenta l'attivo in $t$ della rete.

Affinché si possa onorare il debito deve valere la seguente relazione:

$$W(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k) = W(t,\mathbf{y})$$

cioé in $t$ "il flusso dell'attivo $\mathbf{x}$ immunizza il flusso del passivo $\mathbf{y}$".

Il verificarsi della relazione dipende evidentemente anche dalle funzioni valore utilizzate. Attraverso il vettore $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n)$ resta individuato in $t$ la posta monetaria

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j$$

che rappresenta l'impegno equivalente in $t$ atto a individuare il fondo.

I problemi che si vuole esaminare sono:

1. determinare quali condizioni garantiscono che in $t$, l'attivo (attualizzato) non sia minore del passivo (attualizzato);
2. determinare un vettore di quote che minimizzi l'impegno complessivo in $t$ della rete.

A tale proposito saranno esaminate due situazioni:

a) la prima prevede che ci sia una sola posta monetaria passiva $L > 0$, che si suppone esigibile ad una certa data $H$, con $t_1 < H$;
b) la seconda considera il caso di almeno due poste monetarie passive.

In entrambe le situazioni si fará riferimento ad una ipotesi di cambio della funzione valore, nota nella letteratura finanziaria come *"ipotesi di shift additivi costanti"*.

Assegnato lo "shift costante" $z \in \mathbb{R}$, la nuova funzione valore $v^*(t,s)$, determinata in $t$ dall'organo decisore, é del tipo:

$$v^*(t,s) = v(t,s)e^{-z(s-t)}, \quad \forall \ s \geq t.$$

Lo shift $z \in \mathbb{R}$ deve essere tale che anche la funzione $v^*(t,s)$ verifica gli assiomi della finanza, i quali implicano che sia monotona decrescente rispetto ad $s$. A tale proposito, si puó notare che la funzione valore $v(t,s)$, essendo monotona decrescente rispetto ad $s$ (per un teorema di H. Lebesgue) é derivabile quasi ovunque (rispetto ad $s$) su un opportuno sottoinsieme $\mathbb{A}$ dell'intervallo $[t,+\infty[$, con $[t,+\infty[\setminus\mathbb{A}$ numerabile. Di conseguenza é derivabile sullo stesso insieme $\mathbb{A}$, rispetto alla stessa variabile $s$, anche la funzione $v^*(t,s)$. Passando ai logaritmi ne segue che, $\forall \ s \in \mathbb{A}$, vale la relazione:

$$-\frac{1}{v^*(t,s)}\frac{\partial v^*}{\partial s}(t,s) = -\frac{1}{v(t,s)}\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) + z.$$

Indicando poi con:

$$\delta(t,s) = -\frac{1}{v(t,s)}\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)$$

ed

$$\eta(t,s) = -\frac{1}{v^*(t,s)}\frac{\partial v^*}{\partial s}(t,s)$$

le funzioni *"intensitá istantanea di interesse"* cosí ottenute relative a ciascuna funzione valore, si puó verificare che, $\forall \ s \in \mathbb{A}$, risulta

$$\eta(t,s) = \delta(t,s) + z$$

. Naturalmente $\delta(t,s)$, definita quasi ovunque sull'intervallo $[t,\infty[$, é non negativa. Ovviamente lo shift $z \in \mathbb{R}$ deve essere tale che la funzione $\eta(t,s)$ sia non negativa.

Va notato che la condizione di additivitá appena riportata sulle intensitá istantanee di interesse, non implica la validitá dell'ipotesi fatta prima tra $v(t,s)$ e $v^*(t,s)$. L'implicazione é invece vera, se si suppone che $\delta(t,s)$ é continua, rispetto ad $s$, sull'intervallo $[t,+\infty[$. Tale ipotesi, che ricorre nella letteratura standard, comporta peró che la funzione valore $v(t,s)$ corrispondente sia essa stessa continua, e ammetta derivata prima continua. Si é peró interessati a considerare la funzione valore $v(t,s)$ "solo" monotona.

## 3 Il caso di un solo impegno

Si consideri il caso in cui la rete deve assolvere ad una sola posta monetaria passiva ad una data $H$. Una condizione che fornisce immunizzazione é fornita dal seguente risultato di Fisher-Weil del 1971 che ci limitiamo a riportare nella versione esaminata in [24].

**Theorem 1.** *(di Fisher-Weil).*
*Se risulta:*

1. $W(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) = W(t,L)$;
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) = HLw(t,H)$;

*allora* $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) e^{-z(t_k-t)} \geq Lw(t,H) e^{-z(H-t)} \quad \forall \ z \in \mathbb{R}. \ \diamondsuit$

Si noti che le condizioni 1 e 2, sufficienti per avere immunizzazione, contengono varie possibili combinazioni delle quote dei contributi dei singoli retisti.

Se vale la condizione 1, e se c'é immunizzazione, allora vale anche la condizione 2.

In analogia a [24], se la condizione 2 del risultato appena esposto non si verifica, si puó considerare il seguente teorema la cui verifica é simile a quella vista per Fisher-Weil.

**Theorem 2.** *Se* $W(t,\boldsymbol{x}) = W(t,L)$, *e* $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) \neq HLw(t,H)$, *se risulta:*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) < HLw(t,H)$ *allora esiste* $z^* < 0$ *tale che*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) e^{-z(t_k-t)} \geq Lw(t,H) e^{-z(H-t)} \quad \forall \ z \leq z^*, \ \forall \ z \geq 0;$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) e^{-z(t_k-t)} < Lw(t,H) e^{-z(H-t)} \quad \forall \ z \in ]z^*,0[.$$
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) > HLw(t,H)$ *allora esiste* $z^{**} > 0$ *tale che*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} \geq Lw(t,H)e^{-z(H-t)} \quad \forall\ z \leq 0,\ \forall\ z \geq z^{**};$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} < Lw(t,H)e^{-z(H-t)} \quad \forall\ z \in ]0, z^{**}[.\ \diamondsuit$$

Un caso particolarmente interessante in cui le condizioni 1 e 2 del Teorema di Fisher Weil possono non essere verificate contemporaneamente, si puó avere se ciascuna posta monetaria $x_k$ non dipende da $k$, cioé se si ha:

$$x_k = R,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

In tal caso $R$ ed $H$ verificano le relazioni:

$$R\sum_{k=1}^{+\infty} v(t,t_k) = Lw(t,H); \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} t_k v(t,t_k) = H\sum_{k=1}^{+\infty} v(t,t_k).$$

Se la data $H$ ipotizzata dai retisti, non verifica la relazione trovata, non é possibile avere immunizzazione $\forall\ z \in \mathbb{R}$.

Considerando ora la presenza dei contributi dei retisti, la posta monetaria

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j$$

rappresenta il contributo complessivo che la rete mette a disposizione per onorare il debito $L$.

Si vuole minimizzare tale contributo conservando l'immunizzazione.

A tale proposito occorre individuare un vettore $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ...., \alpha_n^*)$ per cui si ha:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j,\ \ \forall(\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n \\ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) = Lw(t,H) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) = HLw(t,H) \end{cases}$$

Utilizzando i contributi dei singoli retisti, il problema puó essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j,\ \ \forall(\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} v(t,t_k)\right)\alpha_j = Lw(t,H) \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t_k a_{jk} v(t,t_k)\right)\alpha_j = HLw(t,H). \end{cases}$$

Indicando poi con $\tau_j = t + D(t, \mathbf{q}_j)$ il "tempo ottimo di smobilizzo" del titolo $q_j$ relativo al retista $j-esimo$, dove

$$D(t,\mathbf{q}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(t_k - t)a_{jk}v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty}a_{jk}v(t,t_k)}$$

rappresenta la "durata media finanziaria" di ordine 1 di McAulay (vedi [24]), il problema si puó facilmente riscrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^* c_j \le \sum_{j=1}^{n}\alpha_j c_j, \ \ \forall(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \ge 0, \ j = 1,2,...,n \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}a_{jk}v(t,t_k)\right)\alpha_j = Lw(t,H) \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\tau_j\sum_{k=1}^{+\infty}a_{jk}v(t,t_k)\right)\alpha_j = HLw(t,H) \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^* c_j \le \sum_{j=1}^{n}\alpha_j c_j, \ \ \forall(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \ge 0, \ j = 1,2,...,n \\ \sum_{j=1}^{n}W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j = Lw(t,H) \qquad (\mathbf{1}) \\ \sum_{j=1}^{n}\tau_j W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j = HLw(t,H) \qquad (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere un problema di programmazione lineare. Con riferimento all'esistenza di vettori $\boldsymbol{\alpha}$ "ammissibili" si puó considerare il seguente enunciato:

**Theorem 3.** *I) Se esistono $j,l = 1,....,n$ con $j \neq l$ e $\tau_j \neq \tau_l$, allora considerato $H$ con $\min_j \tau_j \le H \le \max_j \tau_j$, l'insieme degli $\alpha$ ammissibili é non vuoto, convesso chiuso e limitato.*
*Se invece $H < \min_j \tau_j$ oppure $H > \max_j \tau_j$ allora l'insieme degli $\alpha$ ammissibili é vuoto.*

*II) Se per ogni $j,l = 1,...,n$ con $\tau_j = \tau_l = H$, allora l'insieme degli $\alpha$ ammissibili é non vuoto, chiuso e limitato.*

*III) Se per ogni $j,l = 1,...,n$ con $\tau_j = \tau_l \neq H$, allora l'insieme degli $\alpha$ ammissibili é vuoto.*

Dimostrazione:

I) Senza ledere la generalitá del problema, si puó supporre $\tau_1 = \min_j \tau_j$ e $\tau_n = \max_j \tau_j$. Assumendo poi $\alpha_1$ ed $\alpha_n$ come incognite, il sistema si scrive nella maniera seguente:

$$\begin{cases} W(t,\mathbf{q}_1)\alpha_1 + W(t,\mathbf{q}_n)\alpha_n = Lw(t,H) - \sum_{j=2}^{n-1} W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j \\ \tau_1 W(t,\mathbf{q}_1)\alpha_1 + \tau_n W(t,\mathbf{q}_n)\alpha_n = HLw(t,H) - \sum_{j=2}^{n-1} \tau_j W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\alpha_1 = \frac{Lw(t,H)\,(\tau_n - H) - \sum_{j=2}^{n-1}(\tau_n - \tau_j)W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j}{W(t,\mathbf{q}_1)(\tau_n - \tau_1)}$$

e

$$\alpha_n = \frac{Lw(t,H)\,(H - \tau_1) - \sum_{j=2}^{n-1}(\tau_j - \tau_1)W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j}{W(t,\mathbf{q}_n)(\tau_n - \tau_1)}$$

da cui si deduce che ci sono quote ammissibili.

Per dimostrare che l'insieme é limitato, si puó notare che:

$$\alpha_j \leq \frac{LW(t,H)}{W(t,\mathbf{q}_j)} \quad \forall j = 1,...,n.$$

Se $H < \min_j \tau_j = \tau_1$ risulta $\alpha_n < 0$, se invece si ha $H > \max_j \tau_j = \tau_n$ allora $\alpha_1 < 0$.

II) le due equazioni $(\mathbf{1})$ e $(\mathbf{2})$ coincidono.

III) le due equazioni $(\mathbf{1})$ e $(\mathbf{2})$ sono incompatibili. $\diamondsuit$

Un caso particolarmente interessante in cui la matrice dei coefficienti ha rango 1, é dato dall'eventualitá che il retista $j-esimo$ versi la stessa posta monetaria $R_j$ ad ogni data $t_k$, cioé $a_{jk} = R_j$.

In tal caso si ha:

$$\tau_j = t + D(t,\mathbf{q}_j) = t + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(t_k - t)R_j v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} R_j v(t,t_k)} = t + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(t_k - t)v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} v(t,t_k)} = \tau$$

da cui si deduce che tutti i "tempi ottimi di smobilizzo" coincidono.

Se poi vale anche la relazione:

$$\tau = t + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(t_k - t)v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} v(t,t_k)} = H$$

l'insieme dei parametri ammissibili é non vuoto, e si ha immunizzazione per ogni shift $z \in \mathbb{R}$.

Se invece si ha:

$$\tau = t + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k - t) v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} v(t, t_k)} \neq H$$

l'insieme degli $\alpha$ ammissibili é vuoto.

In tal caso si puó impostare il problema, della minimizzazione del contributo della rete, nella maniera seguente: si determina un vettore $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ...., \alpha_n^*)$ per cui si ha

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j, \ \ \forall (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \text{con le condizioni} \\ \alpha_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} W(t, \mathbf{q}_j) \alpha_j = Lw(t, H). \end{cases}$$

Risolto questo problema di minimo, poiché per la soluzione ottima risulta:

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_j W(t, \mathbf{q}_j) \alpha_j^* \neq HLw(t, H)$$

l'immunizzazione é parziale.

In tal caso per determinare gli shift che forniscono immunizzazione, si puó applicare il teorema 3.1 oppure 3.2 (a seconda della disuguaglianza ottenuta).

Si noti infine che il problema considerato individua il contributo minimo complessivo della rete, questo peró non comporta che ogni retista veda diminuire il suo contributo inizialmente preventivato. Infatti non é escluso che, per qualche $j = 1, 2, ..., n$, si possa avere $\alpha_j^* > 1$.

## 4 Il caso di piú poste monetarie di debito

Si consideri l'eventualitá in cui la rete si trovi a dover pagare una sequenza di poste monetarie $\mathbf{y} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ciascuna delle quali esigibile alla data $t_k$. In questo caso il problema del rischio di tasso é esaminato utilizzando il teorema di Redington (1952) nella versione esaminata in [24].

**Theorem 4.** *(di Redington) Nell'ipotesi che le nuove funzioni valore siano della forma $v^*(t, s) = v(t, s) e^{-z(s-t)}$ e $w^*(t, s) = w(t, s) e^{-z(s-t)}$ con $z \in \mathbb{R}$, se risulta:*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k)$
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t, t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t, t_k)$
3. $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 x_k v(t, t_k) > \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 y_k w(t, t_k)$

*allora* $\exists \, a > 0 \ : \ \forall z \in [-a, a], \ \textit{con} \ z \neq 0, \ \ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) e^{-z(t_k - t)}$. $\diamondsuit$

Si ottiene una condizione sufficiente per avere l'immunizzazione, ma solo per "alcuni" shift.

Si esaminano ora i seguenti teoremi: il primo riporta un risultato di immunizzazione parziale, mentre il secondo espone un caso di non immunizzazione.

**Theorem 5.** *Nell'ipotesi che le nuove funzioni valore siano della forma* $v^*(t,s) = v(t,s)e^{-z(s-t)}$ *ed* $w^*(t,s) = w(t,s)e^{-z(s-t)}$ *con* $z \in \mathbb{R}$, *e inoltre*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)$
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) \neq \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t,t_k)$

*allora:*

*I) se risulta* $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t,t_k)$ *allora* $\exists\, a > 0$ *tale che*

$$\begin{cases} \forall z \in [-a,0[ \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} \\ \forall z \in ]0,a[ \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)}; \end{cases}$$

*II) se risulta* $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) > \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t,t_k)$ *allora* $\exists\, a > 0$ *tale che*

$$\begin{cases} \forall z \in [-a,0[ \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} \\ \forall z \in ]0,a[ \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} \end{cases} \qquad \diamondsuit$$

Nel seguito sará utile il seguente risultato di non immunizzazione, per la cui dimostrazione si procede come nel caso del teorema di Redington:

**Theorem 6.** *Nell'ipotesi che le nuove funzioni valore siano della forma* $v^*(t,s) = v(t,s)e^{-z(s-t)}$ *ed* $w^*(t,s) = w(t,s)e^{-z(s-t)}$ *con* $z \in \mathbb{R}$*, se risulta:*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)$
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k x_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t,t_k)$
3. $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 x_k v(t,t_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 y_k w(t,t_k)$

*allora* $\exists\, a > 0 \ : \ \forall z \in [-a,a]$, *con* $z \neq 0$, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)}$. $\diamondsuit$

Si determini un vettore $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ...., \alpha_n^*) \in \mathbb{R}^n$ per cui si ha:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j, \ \ \forall (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} t_k a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k y_k w(t, t_k) \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j \geq \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 y_k w(t, t_k) \end{cases}$$

che, posto $\tau_j = t + D(t, \mathbf{q}_j)$ e se $\tau_y = t + D(t, \mathbf{y})$, si puó riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j, \ \ \forall (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) \qquad (\mathbf{1}^*) \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \tau_j \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j = \tau_y \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) \qquad (\mathbf{2}^*) \\ \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 a_{jk} v(t, t_k) \right) \alpha_j \geq \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^2 y_k w(t, t_k) \end{cases}$$

Indicando con $X$ l'insieme degli $\boldsymbol{\alpha}$ ammissibili, se l'insieme é non vuoto, allora é anche convesso, chiuso e limitato. Si tratta quindi di esaminare un problema di programmazione lineare.

Il seguente risultato fornisce le condizioni per cui l'insieme $X$ é non vuoto. Utilizza la "durata media finanziaria" di ordine 2 di McAulay che, per il flusso $\mathbf{y}$, é definita dalla relazione:

$$D^{(2)}(t, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k - t)^{(2)} y_k w(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k)}$$

ed analoga relazione per gli altri flussi.

**Theorem 7.** *I) Se esistono* $j, l = 1, ...., n$ *con* $j \neq l$ *e* $\tau_j \neq \tau_l$*, e se, a meno di rinumerazione, si ha* $\tau_1 = \min_j \tau_j$, $\tau_n = \max_j \tau_j$ *ed* $\tau_y = t + D(t, \mathbf{y})$ *ed inoltre:*

*1.* $\tau_1 \leq \tau_y \leq \tau_n$

*2.* $D^{(2)}(t, \boldsymbol{y}) \leq \frac{\tau_n - \tau_y}{\tau_n - \tau_1} D^{(2)}(t, \boldsymbol{q}_1) + \frac{\tau_y - \tau_1}{\tau_n - \tau_1} D^{(2)}(t, \boldsymbol{q}_n)$

*allora l'insieme degli* $\alpha$ *ammissibili é non vuoto, convesso, chiuso e limitato.*

*II) Se* $\forall j = 1, ..., n$ *si ha* $\tau_j = \tau_y$ *e se esiste* $j^* = 1, ..., n$ *tale che* $D^{(2)}(t, \mathbf{y}) \leq D^{(2)}(t, \boldsymbol{q}_{j*})$*, allora l'insieme é non vuoto, convesso, chiuso e limitato.*

*III)Se* $\forall j,l = 1,...,n \quad$ *si ha* $\tau_j = \tau_l \neq \tau_y$ *allora l'insieme é vuoto.* $\diamondsuit$

Dimostrazione:

I) Assumendo $\alpha_1$ ed $\alpha_n$ come incognite, il sistema si scrive nella maniera seguente:

$$\begin{cases} W(t,\mathbf{q}_1)\alpha_1 + W(t,\mathbf{q}_n)\alpha_n = W(t,\mathbf{y}) - \sum\limits_{j=2}^{n-1} W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j \\ \tau_1 W(t,\mathbf{q}_1)\alpha_1 + \tau_n W(t,\mathbf{q}_n)\alpha_n = \tau_y W(t,\mathbf{y}) - \sum\limits_{j=2}^{n-1} \tau_j W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\alpha_1 = \frac{W(t,\mathbf{y})\,(\tau_n - \tau_y) - \sum\limits_{j=2}^{n-1}(\tau_n - \tau_j)W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j}{W(t,\mathbf{q}_1)(\tau_n - \tau_1)}$$

e

$$\alpha_n = \frac{W(t,\mathbf{y})\,(\tau_y - \tau_1) - \sum\limits_{j=2}^{n-1}(\tau_j - \tau_1)W(t,\mathbf{q}_j)\alpha_j}{W(t,\mathbf{q}_n)(\tau_n - \tau_1)}$$

da cui si deduce che ci sono quote ammissibili.

Per dimostrare che l'insieme é limitato, si puó notare che:

$$\alpha_j \leq \frac{W(t,\mathbf{y})}{W(t,\mathbf{q}_j)} \quad \forall j = 1,...,n.$$

Se $\tau_y < \min\limits_j \tau_j = \tau_1 \quad$ risulta $\alpha_n < 0$, se invece si ha $\tau_y > \max\limits_j \tau_j = \tau_n \quad$ allora $\alpha_1 < 0$.

II) le due equazioni $(\mathbf{1}^*)$ e $(\mathbf{2}^*)$ coincidono.

III) le due equazioni $(\mathbf{1}^*)$ e $(\mathbf{2}^*)$ sono incompatibili. $\diamondsuit$

In modo analogo a quanto notato per il caso di un solo pagamento, se si ha $a_{jk} = R_j$, risulta

$$\tau_j = t + \frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(t_k - t)v(t,t_k)}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v(t,t_k)}.$$

Quindi tutti i tempi ottimi di smobilizzo coincidono, cioé $\tau_1 = \tau_j \quad \forall j = 1,2,...,n.$

Se poi si ha anche $\tau_1 \neq \tau_y, \quad$ allora si determina un vettore $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ per cui si ha:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* c_j \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j, \ \ \forall (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\ \textit{con le condizioni} \\ \alpha_j \ge 0, \ j = 1, 2, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} W(t, \mathbf{q}_j) \alpha_j = W(t, \mathbf{y}). \end{cases}$$

Risolto il precedente problema di minimizzazione, si ottiene immunizzazione parziale. In tal caso a seconda che si abbia $\tau_1 < \tau_y$ oppure $\tau_1 > \tau_y$, dal teorema 5 si deduce quali sono gli shift per i quali si ha, o non si ha, immunizzazione.

Nel teorema di Redington si ipotizza, tra l'altro, che il flusso **x** dell'attivo sia "piú disperso" del flusso **y** del passivo, cioé che $D^{(2)}(t, \mathbf{x}) > D^{(2)}(t, \mathbf{y})$.

Se invece si ha $D^{(2)}(t, \mathbf{x}) = D^{(2)}(t, \mathbf{y})$, non potendo utilizzare il teorema di Redington, si puó fare ricorso al seguente teorema:

**Theorem 8.** *Nell'ipotesi che le nuove funzioni valore siano della forma $v^*(t,s) = v(t,s)e^{-z(s-t)}$ ed $w^*(t,s) = w(t,s)e^{-z(s-t)}$ con $z \in \mathbb{R}$, se:*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k)$
2. *Esiste $p \ge 2$ tale che:*
   $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^r x_k v(t, t_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^r y_k w(t, t_k) \ \ \forall r = 1, 2, ..., p-1$
   $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p x_k v(t, t_k) \neq \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p y_k w(t, t_k)$

*allora:*

*I) se p é dispari si ha immunizzazione locale parziale. Cioé:*

*A) se risulta $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p x_k v(t, t_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p y_k w(t, t_k)$ allora $\exists\, a > 0$ tale che*

$$\begin{cases} \forall z \in [-a, 0[ \ \ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} \\ \forall z \in ]0, a[ \ \ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) e^{-z(t_k - t)}; \end{cases}$$

*B) se risulta $\sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p x_k v(t, t_k) > \sum_{k=1}^{+\infty} (t_k)^p y_k w(t, t_k)$ allora $\exists\, a > 0$ tale che*

$$\begin{cases} \forall z \in [-a, 0[ \ \ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} \\ \forall z \in ]0, a[ \ \ \sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t, t_k) e^{-z(t_k - t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t, t_k) e^{-z(t_k - t)}. \end{cases}$$

*II) se p é pari si ha immunizzazione o non immunizzazione locale. Cioé:*

$$A)\ se \sum_{k=1}^{+\infty}(t_k)^p x_k v(t,t_k) > \sum_{k=1}^{+\infty}(t_k)^p y_k w(t,t_k) \quad allora\ \exists\ a>0\ :\ \forall z\in[-a,a],\ con\ \ z\neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} > \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)};$$

$$B)\ se \sum_{k=1}^{+\infty}(t_k)^p x_k v(t,t_k) < \sum_{k=1}^{+\infty}(t_k)^p y_k w(t,t_k) \quad allora\ \exists\ a>0\ :\ \forall z\in[-a,a],\ con\ \ z\neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k v(t,t_k)e^{-z(t_k-t)} < \sum_{k=1}^{+\infty} y_k w(t,t_k)e^{-z(t_k-t)}.\ \diamondsuit$$

La dimostrazione é simile a quella fatta per il teorema di Redington (vedi [24]).

## References


1. Amato, P.: Sulle perturbazioni maturity dependent: una estensione del teorema di Redington. Proceedings AMASES (1995)
2. Amato, P.: Qualche osservazione sui teoremi d'immunizzazione semi-deterministica. Lavoro eseguito nell'ambito dei progetti di ricerca dell'Istituto di Matematica Finanziaria della Facoltá di Economia dell'Universitá degli Studi di Bari
3. Anzilli, L., Congedo, M.A., Scolozzi, D.: L'immunizzazione finanziaria semideterministica in presenza di tassi di interesse discontinui. Atti 6 Convegno Nazionale Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie, Lamezia Terme (CZ), 24/26 Novembre 2006, Luigi Pellegrini Editore (2006)
4. Bentivogli, C., Quintiliani, F., Sabbatini, D: Le reti di imprese, Questioni di Economia e Finanza (Occasional Paper), n.152 Banca d'Italia
5. Bonomi, A.: Guida Pratica al Contratto di Reti d'Impresa. Retimpresa, Novembre, (consultato il 26 febbraio 2013)
6. Camera di Commercio di Messina, Istituto G. Tagliacarne: Il contratto di rete: come e perché. Guida operativa alle Reti d'Impresa. Progetto Promozione dell'Internazionalizzazione delle piccole e medie imprese, Reti di Imprese, Fondo Perequativo Accordo di Programma MISE-Unioncamere (2014)
7. Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., Mottura, C.: Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse. Il Mulino, Bologna (1993)
8. Colombo, E., Foresti, G., Mangolini, L.: Il Quarto Osservatorio Intesa Sanpaolo Mediocredito Italiano sulle reti d'impresa. Servizio Studi e Ricerche (2014)
9. Congedo, M.A.: Estensione del teorema di Redington. Quaderno n. 6 del Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico-Statistiche, Universitá di Lecce (1997)
10. Congedo, M.A.: Considerazioni su alcuni teoremi d'immunizzazione in ipotesi di stazionarietá dei prezzi. Quaderno 62(12)del Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico-Statistiche, Universitá di Lecce (2004)
11. De Felice, M.: Immunization theory: an actuarial perspective on asset-liability management. in G. Ottaviani (ed.): Financial Risk in Insurance, Springer-Verlag, New York (1995)
12. De Felice, M., Moriconi, F.: La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Il Mulino, Bologna (1991)
13. Fisher, L., Weil, R.L.: Coping with the risk of interest-rate fluctuations: return to bondholders from naive and optimal strategies. Journal of Business, 44, 408–431 (1971)
14. Ghatak, M.,: Screening by the Company You Keep: Joint Liability Lending and the Peer Selection Effect, The Economic Journal, 110, pp. 601-631 (2000)
15. Gozzi, F.: Alcune osservazioni sull'immunizzazione semi-deterministica. Report n. 104, Universitá di Pisa (1996)
16. Il contratto di rete. Ordine dei Dottori Commercialisti e degli Esperti Contabili di Viterbo. Start Press - Tuscia Network srl I Edizione Febbraio (2015)
17. La rete contratto. Guida sintetica per utenti esperti. Guida redatta dalle Camere di Commercio. Registro Imprese Ed. Febbraio (2015)
18. La rete soggetto. Guida sintetica per utenti esperti sugli adempimenti societari. Guida redatta dalle Camere di Commercio. Registro Imprese Ed. Luglio (2014)
19. Montrucchio, L., Peccati, L.: A note on Shiu-Fisher-Weil immunization theorem. Insurance: Mathematics and Economics, 10, 125–131 (1991)

20. Napolitano, M. R.: Il contratto di rete per lo sviluppo delle PMI. Un vademecum operativo. Camera di Commercio di Benevento (2012)
21. OCSE, Enhancing SME Competitiveness: The OECD Bologna Ministerial Conference Paris, (2001)
22. Polidoro, M. F.: La rete di imprese. Istruzioni per l'uso, Universitas Mercatorum, Roma (2014)
23. Redington, F.M.: Review of the principles of life-office valuations, (with discussion). Journal of the institute of Actuaries, 78, 286–340 (1952)
24. Romano, L., Scolozzi, D.: The Financial Immunization by a Sequence of Monetary Items: Fisher Weil and Redington's Theorems Quaderni del Dipartimento di Scienze dell'Economia, Numero MS/4, Universitá del Salento (2014)